

Willen leerkrachten wiskunde
wiskundige gedichten horen van hun
leerlingen? Neen, maar wat dan
wel?



Anne Schatteman
Erasmushogeschool Brussel
Lerarenopleiding

1

Wiskunde 'LEREN' ?

- Wat betekent inzichtelijk leren?
- Welke leerprestaties/ leerresultaten worden nagestreefd?
- Welke leermethode wordt gehanteerd?

volgens de leerlingen

volgens de leerkrachten

2

<p>Wat leren:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ THEORIE <ul style="list-style-type: none"> •nieuwe concepten •eigenschappen •stellingen •voorbeelden ■ TOEPASSINGEN <ul style="list-style-type: none"> •oefeningen als toepassing op de theorie •technieken (procedures) •oplossen van problemen 	L E R A A R	L E E R L I N G
	BEGRIJPEN	GEHEUGEN
	RECONSTRUC- TIE	WERK REPRODUCTIE
	WAT GEBRUIKEN? MET WELK DOEL? KRITISCH TOV OPLOSSING	RECEPTEN VOLGEN
		3

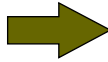
Onze vaak impliciete adviezen:

<ul style="list-style-type: none"> □ Begrijpen wat je doet! □ Stap voor stap analyseren! □ Kritisch zijn □ Meer structureren! □ Selecteren! □ Verbanden leggen □ Anders representeren □ Nauwkeurig werken! 	<ul style="list-style-type: none"> → Hoe? → Welke vragen? → Wat is subtiel? → Sjablonen? → Wat is belangrijk? → Wat met wat en hoe? → Welke taal? → Waar zit de fout?
--	---

Wat betekenen die vaardigheden precies in wiskunde?

HET LEREN VAN WISKUNDE IS COMPLEX:

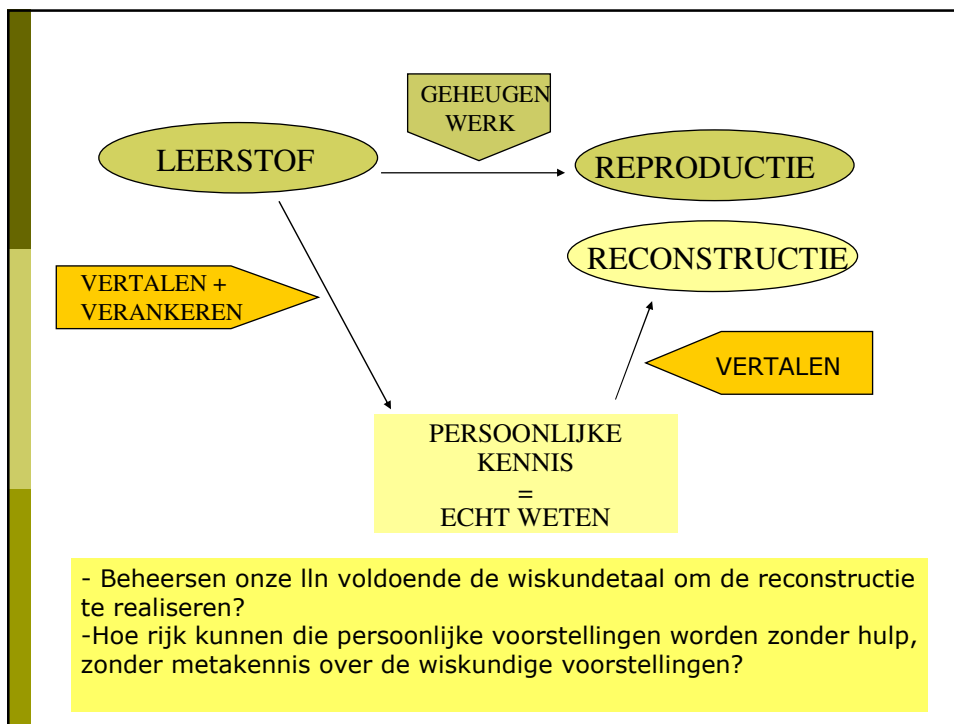
- **Grote verscheidenheid** aan activiteiten en niveaus van beheersing
- achter de schermen laten kijken van het **wiskundige denken**
- **begeleiding** is nodig: **expliciet!**



- leermethode bespreekbaar maken
- leeractiviteiten:
 - demonstreren
 - activeren
- evalueren: inzicht / kritische zin / leerproces

LEERACTIVITEITEN BIJ DE VERWERKING VAN WISKUNDE:

ANALYSEREN	RELATEREN	STRUCTUREREN
* van definities en begrippen	* selectie van kernbegrippen; door welke eigenschappen worden ze met elkaar verbonden?	* zoeken naar het verhaal, de opbouw van de leerstof, zoals de auteur het bedoeld heeft.
* van wiskundige beweringen: opgaven, stellingen en eigenschappen	* vergelijken van verwante, parallelle begrippen of theorieën.	* inventarisatie van aspecten horend bij eenzelfde begrip.
* stapsgewijze analyse in een argumentering;	* horizontaal doorlopen van een paragraaf of hoofdstuk: op zoek naar -waar wordt eenzelfde techniek gebruikt; karakterisaties van een begrip; welke rol speelt eenzelfde begrip in verschillende contexten?	* maken van een persoonlijke structuur: dit wordt de persoonlijke interne neerslag na de verwerking van de leerstof.
* van voorbeelden: welke informatie bevatten ze; wat is er te onthouden?		* structureren van argumenteringen(bewijzen): structuurlagen opbouwen; schematische voorstellingen maken; maken van modellen, algemene schetsen



Voorbeelden: Representatie

1. Welke voorstelling maak je bij de volgende definitie?

Een rekenkundige rij is een rij waarin elke term, de eerste uitgezonderd, gelijk is aan de voorgaande term vermeerderd met een constant getal.

2. Wat betekent 'begrijpen' van de volgende stelling?

Gegeven een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continu met $f(a) < f(b)$.
 Dan geldt $\forall \gamma \in] f(a), f(b)[, \exists c \in] a, b[: f(c) = \gamma$

3. Welke voorstelling maak je bij de volgende definitie?

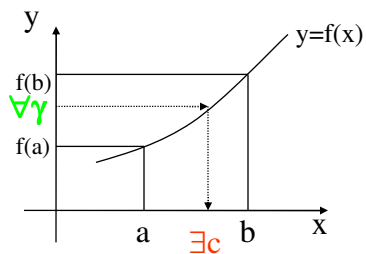
Zijn (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $x_1 \neq x_2$ twee koppels van de functie f , dan wordt het quotiënt $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ het differentiequotiënt genoemd van de functie f voor het interval $[x_1, x_2]$.

9

Niveau 0: vertaling van de symbolen

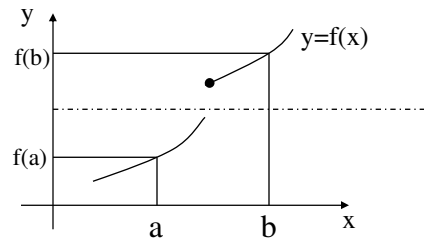
Niveau 1: in eigen woorden: indien dan wordt elke waarde gelegen tussen de twee beelden van de randpunten bereikt.

Niveau 2: een schets:

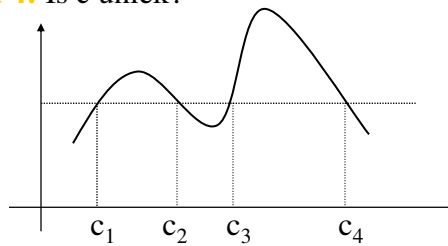


10

Niveau 3: rol van de voorwaarden:

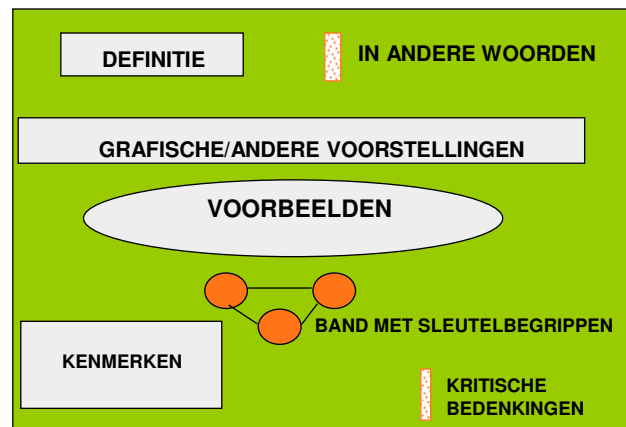


Niveau 4: Is c uniek?



11

Sjabloon conceptsheet



12

Kritische analyse van een bewijs:

Twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ zijn gelijkvormig als twee paren overeenkomstige hoeken even groot zijn.

Kan ik me dit voorstellen?

Stel $|\hat{A}|=|\hat{A}'|$, $|\hat{B}|=|\hat{B}'|$ en $\frac{|A'B'|}{|AB|} = k$.

Te aanvaarden, maar waarom nodig?

Stel h de homothetie met factor k en willekeurig centrum
 $\Rightarrow h(\triangle ABC) = \triangle A''B''C''$.

Waarom kies ik precies deze factor?

$$\frac{|A''B''|}{|AB|} = k$$

Wat heeft de homothetie met een gelijkvormigheid te maken? Waarom mag het centrum willekeurig zijn? Waar komt de $\triangle A''B''C''$ vandaan?

$$\Rightarrow |A''B''| = |A'B'|$$

Welke eigenschap van homothetie?

$$|\hat{A}|=|\hat{A}''|, |\hat{B}|=|\hat{B}''|$$

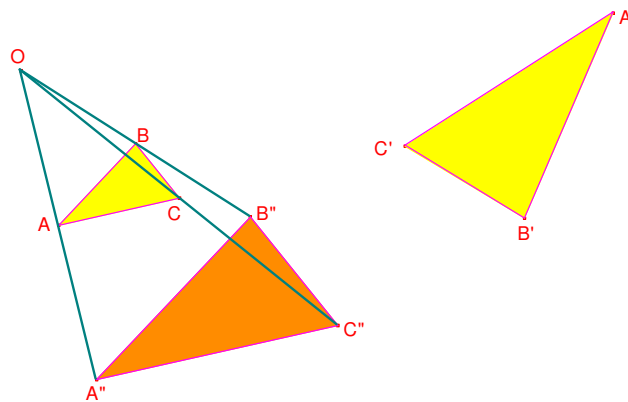
?

$$\Rightarrow |\hat{A}'|=|\hat{A}''|, |\hat{B}'|=|\hat{B}''|$$

Eigenschap van homothetie?

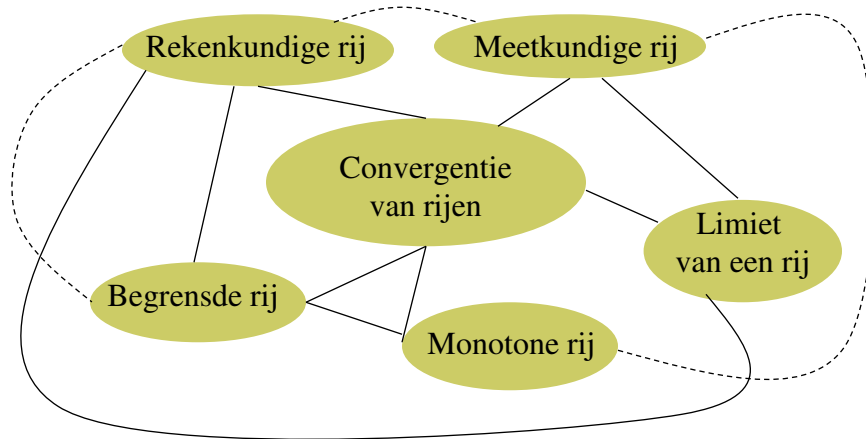
$$\Rightarrow \triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'$$

Welk congruentiekenmerk?



Leerstofkaarten

In een hoofdstuk 'RIJEN' zijn de volgende begrippen van belang. Leg er verbanden tussen a.h.v. definities en eigenschappen.



15

Horizontaal doorlopen van de leerstof:

Waarom zijn dergelijke fiches nuttig?

*Maak een fiche met de verschillende kenmerken van een reguliere matrix.

- * inverseerbaar
- * determinant $\neq 0$
- * rang matrix = orde matrix
- * kolommen lineair onafhankelijk
- * (matrix van een lineaire permutatie)


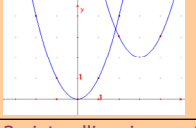
Van een parallellogram

- * Overstaande zijden even lang
- * Overstaande zijden evenwijdig
- * Diagonalen snijden elkaar middendoor
- * Overstaande hoeken even groot
- * Trapezium met evenwijdige zijden even lang

Van een continue functie

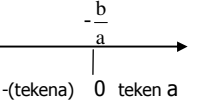
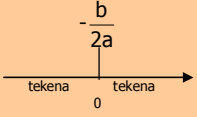
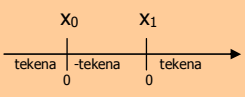
16

Vergelijken van verwante theorieën

Topic	Lineaire functies	Kwadratische functies
Definitie	Veeltermfunctie van de 1 ^{ste} graad: $f(x)=ax+b$	Veeltermfunctie van de 2 ^{de} graad: $f(x)=ax^2+bx+c$
Grafiek	De rechte $y=ax$; $(0,0)$ wordt verschoven naar (x_1,y_1) -> $y=a(x-x_1)+y_1$ 	De parabool $y=ax^2$; $(0,0)$ wordt verschoven naar (x_1,y_1) -> $y=a(x-x_1)^2+y_1$ 
Bepaald door	2 verschillende punten van de grafiek	3 niet collineaire punten van de grafiek
Speciaal	$a=0 \Rightarrow$ constante functie $b=0 \Rightarrow$ grafiek = rechte door oorsprong	$a=0 \Rightarrow$ lineaire of constante functie $c=0 \Rightarrow$ grafiek = parabool door oorsprong



17

Eigenschappen	$a \neq 0$: bijjectie ----- $a > 0$: stijgend $a < 0$: dalend	(? Is er een parallel, neen) $a > 0$ dalparabool $a < 0$ bergparabool
Nulwaarden	$a \neq 0$: één nulwaarde nl. $x = -\frac{b}{a}$	I. $b^2 - 4ac < 0$: geen nulwaarden II. $b^2 - 4ac = 0$: $\exists!$ nulwaarde nl... III. $b^2 - 4ac > 0$: twee \neq nulwaarden
Tekenverloop		I. altijd het teken van a II.  III. 

18

Andere voorbeelden van verwante theorieën:

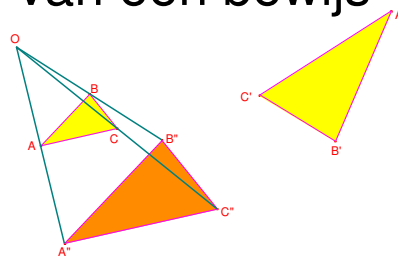
- Continuïteit - limiet
- Vectoren - verschuivingen
- Matrices - lineaire afbeeldingen
- Reguliere matrices - lineaire permutaties
- Exponentiële functie - logaritmische functie
- Parabool - ellips – hyperbool
- ...

19

Schema/structuur van een bewijs

Het is een existentiële stelling:
T.B. \exists homothetie h :
 $h(\triangle ABC) \cong \triangle A'B'C'$

1. kandidaat h :
we nemen als factor: $\frac{|A'B'|}{|AB|}$
centrum: willekeurig.



2. het is een goede kandidaat:
 $h(\triangle ABC) = \triangle A''B''C''$ (eigenschap homothetie)
 $\triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'$ (HZH)

20


Laten we eerlijk zijn....

- Geven we de IIn voldoende tijd om de verwerking te realiseren die we voor ogen hebben? (voor de gemiddelde leerling)
- Begeleiden we hen steeds expliciet in hoe ze de leerstof thuis moeten verwerken?
- Is het mogelijk inzichtelijk te leren zonder metakennis over wiskunde?
- Is wiskundetaal even makkelijk te leren als 'gewone' taal, gaandeweg, in het gebruik? En kan het niet zijn dat IIn wel degelijk begrijpen maar zich niet kunnen uitdrukken?
- Evalueren we de IIn in overeenstemming met onze 'inzicht-verwachtingen? Is het duidelijk wat we verwachten? Moeten 'alle' aspecten begrepen zijn?

21

Meer aandacht voor het **leerproces** ipv **leerproduct**

- **huiswerk** als deel van het leerproces
- **Oefenen op** (wiskunde)taal
- **leertaken**: gedetailleerd:
 - ≠ aspecten van het wiskunde-leren: kritische vragen/structuren/verbanden
 - de verwachte interactie met de leerstof expliciet maken
- **metacognitieve feedback**:
 - begrijpen ≠ van buiten leren-> min. geheugenwerk + max reconstructie
 - belang van het representeren
 - link van de leeractiviteiten met het geheugen (winst)
 - het 'leren' bespreekbaar maken
- **evaluatie** in overeenstemming
- **op zoek in de wiskunde-leerstof** naar
 - de verbanden die men wil laten ontdekken
 - de structuren die erin te vinden zijn
 - Keuzes maken: niet alle inzichten nastreven



Laten we
'Wiskunde leren'
haalbaar maken!